XVII Olimpiada Nacional de MATEMÁTICA 2017

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LAS Y LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

SOBRE LA PRUEBA

La prueba será administrada a estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar únicamente la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2017. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes que pertenecen al sistema bilingüe deben resolver la prueba del grado en que finalizarán este año.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN

El procedimiento de participación en la décimo séptima Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente: El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **12 al 19 febrero**, registrar sus datos personales en el sitio web **http://www.jovenestalento.edu.sv** además deberá imprimir el comprobante de registro para presentarlo junto con las soluciones de los problemas publicados en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día **lunes 20 de febrero**, a las 3:00 p.m. para las zonas occidental, central, metropolitana y paracentral. Y para la zona oriental (Usulután, San Miguel, Morazán y La Unión) a más tardar el día **miércoles 22 de febrero**, a las 3:00 p.m. Las soluciones y comprobante de registro deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, debe imprimirse dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre manila y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido. El estudiante puede llevarlo personalmente o podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto o para registrar sus datos en el sistema, las pruebas se recibirán únicamente en la correspondiente Dirección Departamental, puede consultarse en **www.mined.gov.sv** las direcciones y teléfonos de estas oficinas para mayor información.

INGRESO DE DATOS

Los estudiantes deberán ingresar los siguientes datos: Nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono, dirección de correo electrónico. Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: código y nombre. Para hacer efectivo el ingreso de datos acceder el sitio web http://www.jovenestalento.edu.sv

LA PRUEBA PRESENCIAL

Acerca de la prueba presencial: las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una prueba presencial el día **sábado 11 de marzo** del presente año, la prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática en el Edificio del Programa Jóvenes Talento, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental de la Universidad de El Salvador, según la procedencia de cada estudiante. Los concursantes convocados serán notificados en su Centro Educativo y alternativamente podrán consultar los listados oficiales publicados en **http://www.jovenestalento.edu.sv** o **www.mined.gob.sv** desde el día **martes 7 de marzo de 2017**, donde se especificará el lugar y aula donde cada estudiante realizará la prueba presencial. Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatorio para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez, dicha prueba se realizará después de finalizar la prueba presencial.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO

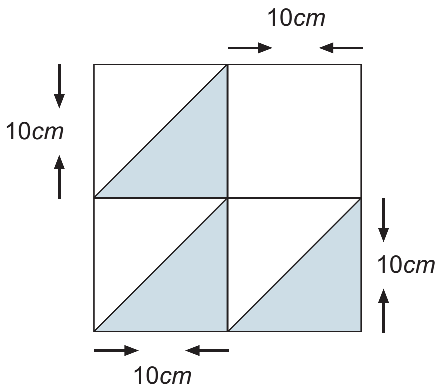
Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física y Química. La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en **http://www.jovenestalento.edu.sv** o **www.mined.gob.sv** el día **martes 28 de marzo de 2017**. La Academia Sabatina se inaugurará el **sábado 01 de abril de 2017** a partir de las 08:00 a.m. en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador (San Salvador), en la Facultad Multidisciplinaria de Occidente (Santa Ana) y Facultad Multidisciplinaria Oriental (San Miguel), dependiendo de la sede donde haya sido seleccionado el estudiante y este mismo día se iniciarán las actividades académicas por la mañana luego de finalizar la inauguración.

El Programa Jóvenes Talento invita a participar en la VI Olimpiada Nacional de Biología, X Olimpiada Salvadoreña de Física, XIII Olimpiada Nacional de Química y I Olimpiada Nacional de Informática para más información visite: http://www.jovenestalento.edu.sv

CUARTO GRADO

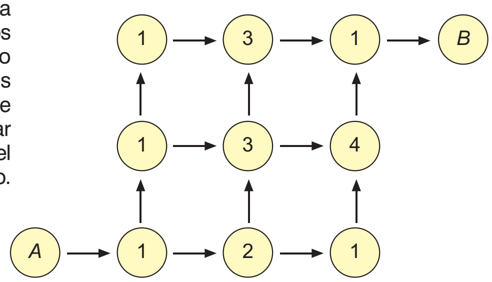
Problema 1

Determinar el área de la región sombreada en la siguiente figura.



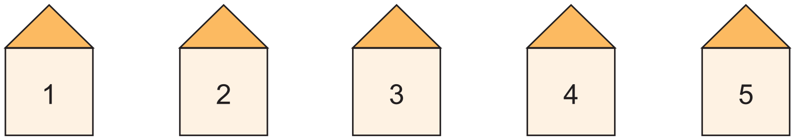
Problema 2

Un ratón llamado Tachito tiene que llegar del círculo *A* al círculo *B* siguiendo las flechas. En cada círculo hay una cantidad de trocitos de queso según lo indica el número escrito. Determine todos los caminos posibles que puede recorrer Tachito y además indicar en cuál de los caminos recogerá el mayor número de trocitos de queso.



Problema 3

En una colonia se han construido cinco casas en fila, numeradas como muestra la figura. Las casas están pintadas de un solo color: verde, blanco, gris, rosado o azul. Se sabe que las casas verde y rosada tienen número par, la casa gris solo tiene una casa al lado, y la casa verde está junto a las casas azul y gris. Determinar el color de la casa 3.



Problema 4

Mario y José lanzan 7 veces una moneda. Si cae cara gana Mario, si cae cruz gana José. Luis recompensa a los ganadores del juego de la siguiente manera: el primer ganador recibe un dulce, el segundo que gana recibe 2 dulces, el tercero recibe 4 dulces, el cuarto 8 dulces, y así sucesivamente. Determinar el número de veces que ganó José si en total recibió 100 dulces.

Problema 5

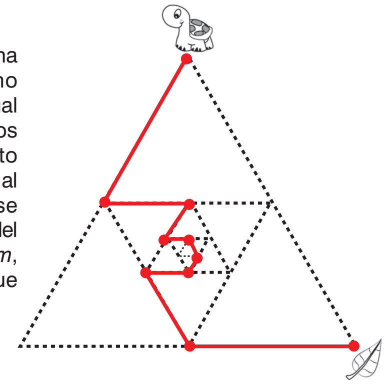
A lo largo de una ruta hay 7 pueblos, llamados *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G*, en el orden mostrado. Julia elabora una tabla con las distancias en kilómetros entre cada pueblo, pero varios datos se le borraron. Ahora solamente se ven seis de las distancias; por ejemplo de *B* a *E* hay 27 kilómetros. Determinar la distancia en kilómetros entre *A* y *G*.

A						
	B					
		C				
19			*D*			
	27			*E*		
47		34			*F*	
	48		37			*G*

QUINTO GRADO

Problema 1

Para llegar a su comida, una tortuga recorre el camino marcado en la figura, la cual está formada por triángulos equiláteros. Si cada punto divide en dos partes iguales al segmento sobre el que se encuentra y además el lado del triángulo grande mide 16 *cm*, determinar la distancia que recorrió la tortuga para llegar a su comida.



Problema 2

Carmen tiene monedas de denominación *A* y Enrique tiene monedas de denominación *B*, entre ambos tienen 6 dólares. Carmen tiene el doble de dinero que Enrique, pero Enrique tiene el doble de monedas que Carmen. Las denominaciones de las monedas pueden ser 1, 5, 10, 25 centavos y 1 dólar. Determinar la cantidad de dinero y la denominación de las monedas que tiene cada uno.

Problema 3

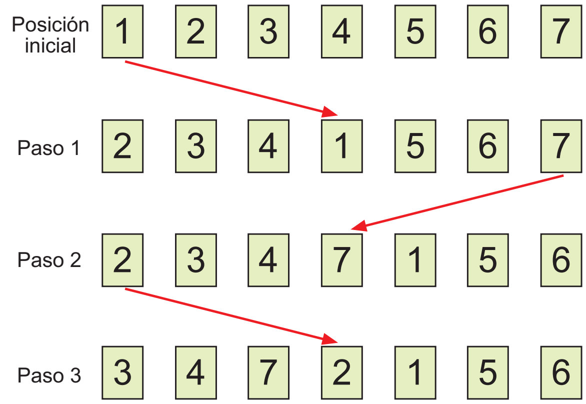
Rodrigo, Marcela, Jorge y Diego se sientan alrededor de una mesa a jugar distintos videojuegos. El que se sienta a la izquierda de Marcela juega Clash of Clans. Rodrigo está frente al que juega Zelda. El que se sienta a la derecha de Diego juega Pokémon Go. El que juega Super Mario Bros está frente al que juega Pokémon Go. Determinar el videojuego que cada uno tiene.

Problema 4

Una planta nace con cuatro hojas y sin flores. Luego empieza a crecer de la siguiente manera: cada día que pasa le salen 6 flores y 3 hojas o bien 8 flores y 4 hojas. Se sabe que cierto día tiene 29 hojas. Determinar el número de flores que tiene ese día y el número de días que han transcurrido como máximo desde que nació.

Problema 5

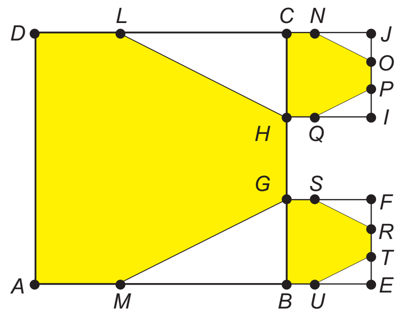
Se dispone de 7 tarjetas en fila, numeradas del 1 al 7 de izquierda a derecha. Las tarjetas se van cambiando de posición como muestra la figura: en el paso 1, se toma la tarjeta del extremo izquierdo y al moverla al centro desplaza una posición a las tres tarjetas que quedan a su izquierda; en el paso 2, se toma la carta del extremo derecho y al moverla al centro desplaza una posición a las tres tarjetas que quedan a su derecha; y así sucesivamente. Determinar la tarjeta que quedará al centro en el paso 2017.



SEXTO GRADO

Problema 1

El lado BC del cuadrado $ABCD$ está dividido en tres partes iguales y se sabe que CL y BM miden el doble de BG. De manera similar se construyen los cuadrados $HIJC$ y $BEFG$. Determinar el área de la región sombreada si $AB = 1\ cm$.



Problema 2

Un edificio de 2017 pisos tiene 6 habitaciones en cada piso, numeradas en forma consecutiva. Ralph el Demoledor decide destruir una habitación de cada piso, de forma que inicia destruyendo la habitación 1 y luego avanza destruyéndolas en diagonal, como lo muestra la figura. Determinar el número de la última habitación que destruirá Ralph.

Piso 2017	?	?	?	?	?	?
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Piso 8	43	44	45	46	47	48
Piso 7	37	38	39	40	41	42
Piso 6	31	32	33	34	35	36
Piso 5	25	26	27	28	29	30
Piso 4	19	20	21	22	23	24
Piso 3	13	14	15	16	17	18
Piso 2	7	8	9	10	11	12
Piso 1	1	2	3	4	5	6

Problema 3

El profesor Utonio tiene un recipiente que contiene azúcar, otro que contiene flores, otro que contiene muchos colores y otro que contiene la sustancia *X*. Con el total de estos ingredientes puede crear exactamente 210 chicas superpoderosas, pero no desea gastar todos sus ingredientes, por lo que decide que como máximo utilizará $\frac{2}{5}$ del contenido de uno de los recipientes, $\frac{4}{7}$ del contenido de otro de los recipientes, $\frac{1}{2}$ del contenido de otro de los recipientes y $\frac{2}{3}$ del contenido del último recipiente (no necesariamente en este orden). Determinar la máxima cantidad de chicas superpoderosas que el profesor puede crear bajo estas restricciones.

Problema 4

En la juguetería "Todo es Posible" venden una pelota que al ser lanzada sigue rebotando indefinidamente. La distancia que la pelota avanza en cada rebote es la semisuma del mayor y el menor número primo que dividen al número de metros que avanzó en su rebote anterior. Si en el primer rebote la pelota avanza 161 metros, determinar el número de rebotes que la pelota habrá dado cuando haya recorrido 6182 metros a partir de su posición inicial.

Nota: *Si un número es divisible por un solo primo, el mayor y menor primo que lo dividen coinciden con ese primo. Por ejemplo el mayor y menor primo que dividen a 9 es 3.*

Problema 5

En un bosque se reúnen cuatro arañas de colores distintos: amarillo, azul, verde y rojo. Cada araña tiene un número distinto de ojos, y el número posible de ojos de cada araña puede ser 2, 4, 6 u 8. En el transcurso de la reunión las arañas hacen algunas observaciones:

- La araña roja cuenta el número de ojos de sus tres compañeras y dice que no es múltiplo de 7.
- La araña verde dice que el número de ojos que ve es múltiplo de 3.
- La araña azul menciona que el número de ojos que ve no es múltiplo de 8.
- La araña amarilla sabe cuántos ojos ve cada una de sus compañeras, suma esos tres números y dice que el total es múltiplo de 3.

Determinar el número de ojos que tiene la araña azul.

SÉPTIMO GRADO

Problema 1

Considere la siguiente secuencia de figuras, donde cada figura está formada por cuadrados de lado 1 *cm*. Por ejemplo, la Figura 1 está formada por tres cuadrados de lado 1 *cm*. Determinar el perímetro de la Figura 2017, expresado en *cm*.

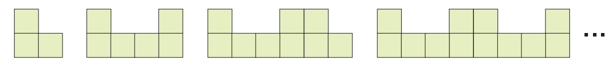


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

Problema 2

Hay cien casilleros cerrados numerados del 1 al 100 y cien llaves. Al usar la primera llave se observa que abre cada casillero, al usar la segunda llave resulta que cambia el estado de cada casillero con número múltiplo de 2 (si está abierto lo cierra, y si está cerrado lo abre), la tercera llave cambia el estado de cada casillero con número múltiplo de 3, y así sucesivamente. Determinar los números de los casilleros que quedarán abiertos después de haber utilizado todas las llaves.

Problema 3

Lourdes pensó en un número de cuatro cifras y luego escribió los siguientes cuatro números como pistas, donde en cada uno de ellos la cantidad de unos indica la cantidad de dígitos de ese número que coinciden con el que ella pensó:

2051 2017 1021 3039

Además, Lourdes dice que el número que pensó es múltiplo de 3 y que el dígito de las centenas es par. Con la información anterior, determinar razonadamente el número que Lourdes pensó.

Problema 4

Dos polígonos regulares de lado 1 tienen un lado común de manera que uno no está contenido en el otro. Uno de los dos polígonos tiene 15 lados y el otro tiene n lados. Se etiquetan con A y B a los vértices del lado que comparten ambos polígonos, con C al otro vértice que es adyacente a B sobre el 15-ágono y con D al otro vértice que es adyacente a B en el otro polígono. Sabiendo que la distancia entre C y D es 1, determinar la medida del ángulo ABD y el valor de n.

Problema 5

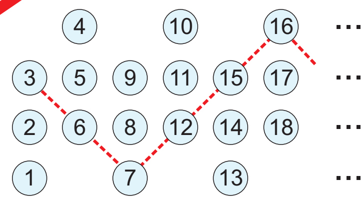
Arnoldo, Byron y Gabriel jugaron fútbol de la manera siguiente: en cada partido, dos de ellos eran jugadores de campo y trataban de hacer un gol al que estaba de portero, el que hacía el gol se colocaba a la meta como portero en el próximo partido y el que estaba de portero pasaba a ser jugador de campo, y continuaron de esa manera. Sabiendo que Arnoldo estuvo 12 veces en el campo, Byron estuvo 21 veces en el campo y que Gabriel estuvo 8 veces de portero, determinar quién hizo el sexto gol.

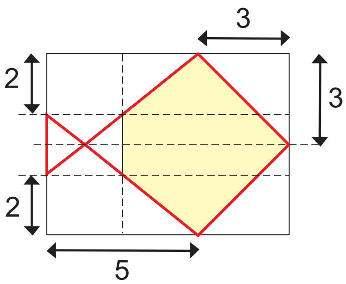
XVII Olimpiada Nacional de MATEMÁTICA 2017

OCTAVO GRADO

Problema 1

Dorothy camina en diagonal iniciando en la primera columna por el número 3, como lo muestra la figura. Determinar el número en el que Dorothy estará parada en la columna 2017.



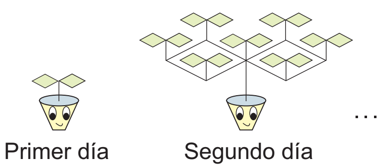


Problema 2

En un trozo de papel rectangular de dimensiones 8 x 6 se trazan unas líneas punteadas paralelas a los lados del rectángulo, como muestra la figura anterior. Utilizar la información mostrada para calcular el área sombreada.

Problema 3

En el país *A* viven tres grupos de personas: agricultores, bomberos y comerciantes, en el país *B* viven dos grupos de personas: deportistas y escritores. En una conferencia se reúnen personas de ambos países de tal forma que cada grupo de cada país tiene al menos un representante, y el número total de personas en la conferencia es múltiplo de 5 y no mayor a 50. En cada país los asistentes de uno de los grupos duplican al número de asistentes de otro grupo del mismo país. En ambos países hay dos grupos cuya diferencia de asistentes es 2 y cada grupo del país *A* tiene más de 3 miembros. Determinar el número de asistentes a la conferencia.



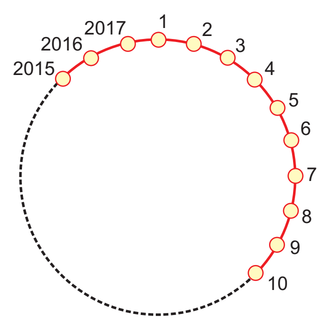
Problema 4

Máterbol es una especie mística de Pokémon. Estando fuera o dentro de la pokébola, cada día crece y retoña misteriosamente: un retoño (primer día) crece y en cada nudo le crece un nuevo retoño (el segundo día tiene 7 retoños), el tercer día tendrá 49 retoños y así sucesivamente. Cierto día, Ash peleando contra el equipo Rocket elige cuatro Máterbol, que en total tienen 41179600 retoños. Determinar los días de vida que tiene cada Máterbol.

Problema 5

"1 y 7 en 2017" es un juego con dos participantes *A* y *B*. Se numeran 2017 casillas en forma circular, como muestra la figura. El juego consiste en pintar alternadamente casillas en sentido horario separadas a distancia 1 y 7 (cada casilla puede ser pintada más de una vez). El jugador que gana es el que pinta primero la casilla 2017 luego de que todas las demás hayan sido pintadas al menos una vez. El jugador *B* escoge su cantidad de casillas que avanzará (1 o 7) y el jugador *A* sabiendo la elección del jugador *B* es el que comienza el juego escogiendo y pintando la casilla donde iniciar. Determinar una estrategia ganadora para el jugador *A*.

Nota: *Por ejemplo las casillas 2, 9 y 10 están a distancias 7 y 1 respectivamente.*



NOVENO GRADO

Problema 1

Una cuadrícula de 23 × 23 quiere cubrirse completamente utilizando cuadrados de lados 1, 2 y 3, sin traslaparse.

a) Muestre que es posible lograrlo si se dispone solo de cuatro cuadrados de lado 1.

b) Determinar si es posible lograrlo al disponer solo de un cuadrado de lado 1.

Problema 2

Sean a y b números reales positivos tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$.

Calcular $\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

Problema 3

Se desea llenar una caja rectangular con cubitos de 1 x 1 x 1. El largo, ancho y alto de la caja son números primos y su volumen es diecinueve veces la suma del largo, ancho y alto. Determinar el número de cubitos que se necesitan para llenar la caja.

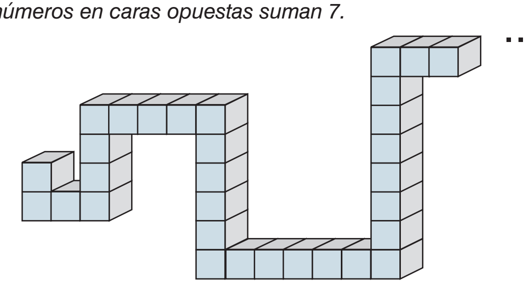
Problema 4

Sea *ABCDEF* un hexágono regular. En las diagonales *CA* y *CE* se han ubicado los puntos *M* y *N* respectivamente, de manera que *M*, *N* y *B* son colineales y *AM* = *CN*. Determinar la medida del ángulo *DNB*.

Problema 5

Alexis tiene 2017 dados y con ellos construye un sólido con forma de serpiente. En la figura se muestra la parte inicial de la construcción. Sabiendo que para unir los dados Alexis ha ido pegando caras con igual número, determinar el máximo valor que se puede obtener al sumar los números en todas las caras en la superficie del sólido.

Nota: *Cada dado tiene sus caras numeradas de 1 a 6 y los números en caras opuestas suman 7.*



PRIMER AÑO

Problema 1

Determinar la cantidad de enteros positivos del 1 al 10^{2017} que cumplen que la suma de sus cifras sea exactamente 2.

Problema 2

Un entero positivo es tal que tanto al sumarle 2000 como al restarle 17 el resultado es un cuadrado perfecto. Determinar dicho número.

Problema 3

Se pinta cada número entero de rojo o azul de acuerdo a las siguientes reglas:

- El número 1 es rojo.
- Si *a* y *b* son dos números rojos, no necesariamente distintos, entonces los números *a-b* y *a+b* tienen distinto color.

Determinar el color del número 2017.

Problema 4

Determinar todos los números reales positivos *x*, *y*, *z* que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{x} + y + z = x + \frac{1}{y} + z = x + y + \frac{1}{z} = 3.$$

Problema 5

Sean *ABCD* un rectángulo y *M* un punto sobre el segmento *BC*. La bisectriz del ángulo *DAM* interseca al segmento *CD* en *N*. Si $AM = BM + DN$, demostrar que *ABCD* es un cuadrado.

"HACIA LA LIBERTAD POR LA CULTURA"